

生層序ユニット中の化石タクサの組み合わせの欠落を推定するための全順序集合上の区間のグラフ

山口 久美子*・塩野 清治**

Graph of Intervals on a Totally Ordered Set to Estimate Lacked Associations of Fossil Taxa in Biostratigraphic Units

Kumiko YAMAGUCHI* and Kiyoji SHIONO**

* 5-3-5 Midorigaoka, Heguri Ikoma-gun Nara 636-0941, Japan. E-mail: qys05253@nifty.ne.jp

**大阪市立大学名誉教授 Department of Geoscience, Graduate School of Science, Osaka City University, 3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka 558-8585, Japan.

キーワード：生層序学，化石群集，不整合，区間，論理地質学

Key words: Biostratigraphy, Fossil Assemblage, Unconformity, Interval, Geology-Oriented Logical System

1. はじめに

地質学概念の有効なアルゴリズムを開発するためには、その概念を表現する数学の道具立ても必要である。全順序集合上の区間のグラフは、化石タクサの組み合わせの順序表現に有効である(山口・塩野, 2013)。今回の発表では、生層序ユニット中の化石タクサの欠落の発見に、全順序集合上の区間のグラフを応用する。

2. 有限な全順序集合上の区間のグラフ

2.1 有限な全順序集合上の区間

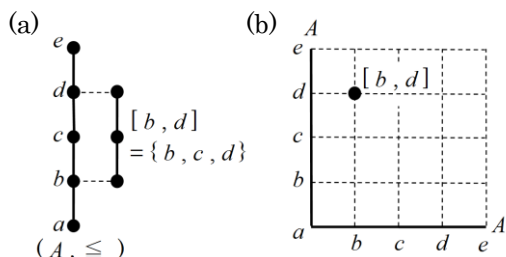
A を有限集合、 \leq を A 上の全順序とする。有限な全順序集合 (A, \leq) 上の区間 $[a, b]$ を、 $a \leq b$ である $a, b \in A$ に対して、

$$[a, b] = \{ x | a \leq x \leq b, x \in A \} \quad (1)$$

と定義する。

全順序集合 (A, \leq) 上の区間のグラフは、 $A \times A$ の座標図に、区間 $[a, b]$ を点 (a, b) で表示したものである(塩野・山口, 1996)。以下、全順序集合上の区間のグラフを単に「区間グラフ」と呼ぶこともある。

第1図(a)は、 $A = \{ a, b, c, d, e \}$ 、 $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ とするときの (A, \leq) と、 (A, \leq) 上の区間 $[b, d] = \{ b, c, d \}$ を示したハッセ図である。第1図(b)は (A, \leq) 上の区間 $[b, d]$ を表示した区間グラフである。



第1図 区間のグラフ表示。(a)全順序集合 (A, \leq) 上の区間 $[b, d]$ 。(b)区間グラフに区間 $[b, d]$ を表示した例。

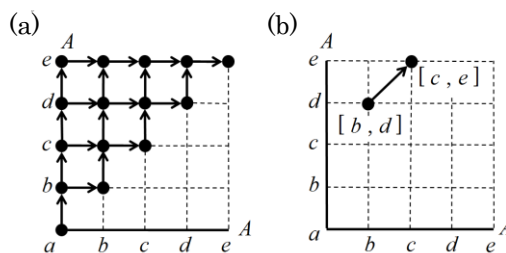
2.2 区間の集合上の順序

(A, \leq) 上の区間全体の集合を A^* と書くことにする。

A^* 上の順序 \leq^* を次のように定義する。

$$[a, b] \leq^* [c, d] \Leftrightarrow a \leq c, \text{ かつ } b \leq d. \quad (2)$$

第2図(a)は順序集合 (A^*, \leq^*) の区間グラフの例である。このグラフは、 \leq^* の反射的、推移的な性質を表示せず、直前・直後の関係を1目盛の上向きと右向きの矢印で示している。第2図(b)では $[b, d] \leq^* [c, e]$ の関係を右上向きの矢印で表示した。



第2図 区間グラフ。(a)順序集合 (A^*, \leq^*) 。(b) $[b, d] \leq^* [c, e]$ 。

3. 化石タクサの組み合わせの欠落

3.1 タクソンの生存期間

或る時刻を 0 とし、時刻を年・月・日・時・分・秒など時間の単位で計測した数値とする。さらに、その数値を、小数点以下を切り捨てた整数とする。時刻 i, j に対して、

$$i < j \Leftrightarrow i \text{ は } j \text{ より過去である} \quad (3)$$

とし、

$$[i, j] = \{ t | i \leq t \leq j, t \text{ は実数} \} \quad (4)$$

を時刻 i から時刻 j までの時間、あるいは、期間とよぶことにする。なお、(4)の実数の大小についても(3)と同様とする。

タクソン(taxon)は生物の分類単位であり、その複数形がタクサ(taxa)である。生物の個体はタクソンに分類される。

個体はある時刻からある時刻までの時間に生存すると仮定する。タクソンの生存期間を、分類された個体の生存する時間の和集合であると定義する。生層序学の基礎である化石の連続性の前提として、タクソンは次の公理(性質)を満たすものと仮定する。

公理 タクソンの生存期間は、ある時刻からある時刻までの期間である。

3.2 上位のタクソンと下位のタクソン(種)

生物は上位から界, 門, 綱, 目, 科, 属, 種というタクソンに階層的に分類される。以下, Σ を上位のタクソンとし, Σ の個体を階層的に分類し, 種の集合 S_0 を得たとする。

Σ の生存期間を T , 種 α の生存期間を $\tau(\alpha)$ とする。 T も $\tau(\alpha)$ はある時刻からある時刻までの期間であるという公理を満たす。タクソンの生存期間の定義より, S_0 のすべての種の生存期間の和集合が T となる。

$$T = \bigcup_{\alpha \in S_0} \tau(\alpha).$$

3.3 種の選択

$\tau(\alpha)=[i, j]$ であるとき, $\tau(\alpha)$ の最小元 $\min \tau(\alpha)$ は i である。 $\tau(\alpha)$ の最大元 $\max \tau(\alpha)$ は j である。

種の生存期間の前後関係 $<^*$ を次のように定義する。

$$\tau(\alpha) <^* \tau(\beta) \Leftrightarrow \min \tau(\alpha) < \min \tau(\beta), \text{ かつ, } \max \tau(\alpha) < \max \tau(\beta). \quad (5)$$

S_0 上の順序 κ を次のように定義する。

$$\alpha \kappa \beta \Leftrightarrow \tau(\alpha) <^* \tau(\beta), \text{ または, } \alpha = \beta. \quad (6)$$

S_0 から次の2つの仮定を満たす種の集合 S を選択して, 塩野・山口(1997)と同様に, T をいくつかの年代に区分する。

仮定 1 (S, κ) は有限な全順序集合である。

仮定 2 $T = \bigcup_{\alpha \in S} \tau(\alpha)$ 。

3.4 化石タクサの組み合わせ

仮定 1, 2 を満たす S を選択したとき, T のある時刻 i (i は整数)に生存する種の集合を

$$\sigma(i) = \{ \alpha \mid i \in \tau(\alpha), \alpha \in S \} \quad (7)$$

とする。 T と 1 対 1 対応する層序断面があるとすれば, $\sigma(i)$ を, 小数点以下を切り捨てて i となる実数の集まりに対応する生層序ユニット i 層中の化石タクサの組み合わせとみなしてもよい。 $\sigma(i)$ は (1) と同様な (S, κ) 上の区間である。化石タクサの組み合わせは, (2) の定義と同様な S^* 上の順序 κ^* で順序づけられる。 i 層, j 層に対して,

$$i \leq j \Rightarrow \sigma(i) \kappa^* \sigma(j) \quad (8)$$

が成り立つ。

3.5 化石のタクサの組み合わせの欠落

$\sigma(i)$ と $\sigma(i+1)$ の間に化石タクサの組み合わせの欠落があるか, ないかを考える。

σ の定義域を T 全体(実数の集合)に拡張しても (8) の性質は成り立つ。よって, $\sigma(i) = \sigma(i+1)$ の場合は, $\sigma(i)$ と $\sigma(i+1)$ の間に化石タクサの組み合わせの欠落がない。

$\sigma(i) \neq \sigma(i+1)$ で $\sigma(i) \kappa^* \sigma(i+1)$ であるが, $\sigma(i)$ と $\sigma(i+1)$ の間に S^* の区間がなく, 区間グラフで, $\sigma(i) \kappa^* \sigma(i+1)$ が第2図(a)のような上向き, あるいは, 右向きの1目盛の矢印で表示されるときも欠落がないといえる。

年代毎の化石タクサの組み合わせの順序は, 区間グラフで上向き, あるいは, 右向きの1目盛の矢印で表示される(山口・塩野, 2013)。したがって, $\sigma(i) \kappa^* \sigma(i+1)$ で, $\sigma(i)$ と $\sigma(i+1)$ の間に S^* の区間があるとき, $\sigma(i)$ と $\sigma(i+1)$ の間に化石タクサの組み合わせに欠落がある。 (S, κ) を

$$S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \}, \quad \alpha_1 \kappa \alpha_2 \kappa \dots \kappa \alpha_n$$

とし, $\sigma(i) = [\alpha_j, \alpha_k]$ とすると, 公理と (6) より, $i = \max \tau(\alpha_j)$, かつ, $i+1 = \min \tau(\alpha_{k+1})$ のときに, このようなことが起こり, $\sigma(i+1) = [\alpha_{j+1}, \alpha_{k+1}]$ となる。小数点以下を切り捨てた整数を時刻としているので, 種の生存期間の最小元と最大元を合

わせた時刻(整数)の前後関係は時刻(数値)でもそのまま保持され, 化石タクサの組み合わせ $[\alpha_{j+1}, \alpha_k]$ が欠落する。区間グラフでは, $\sigma(i) \kappa^* \sigma(i+1)$ は第2図(b)のような1マス対角線で右上向きの矢印で表示される。欠落した $[\alpha_{j+1}, \alpha_k]$ をグラフに加えると, $\sigma(i) \kappa^* [\alpha_{j+1}, \alpha_k]$, $[\alpha_{j+1}, \alpha_k] \kappa^* \sigma(i)$ が, それぞれ, 右向き, 上向きの1目盛の矢印で表示される。 i 層と $i+1$ 層の間に $[\alpha_{j+1}, \alpha_k]$ を含む生層序ユニットがあるはずである。

3.6 例

第3図の例では, $S = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ を選択している。第3図(a)のように, Σ の生存期間 T は $T = [1, 9]$ で, 種 α, β, γ の生存期間は, それぞれ, $\tau(\alpha) = [1, 5]$, $\tau(\beta) = [4, 7]$, $\tau(\gamma) = [6, 9]$ である。

化石タクサの組み合わせは,

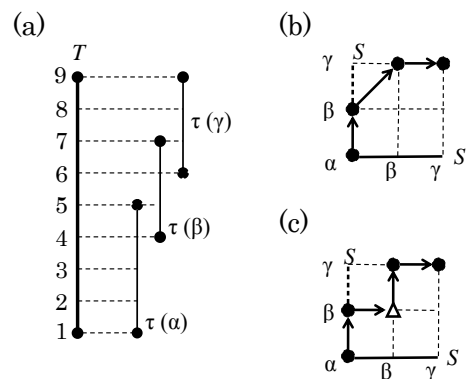
$$\sigma(1) = \sigma(2) = \sigma(3) = [\alpha, \alpha], \quad \sigma(4) = \sigma(5) = [\alpha, \beta],$$

$$\sigma(6) = \sigma(7) = [\beta, \gamma], \quad \sigma(8) = \sigma(9) = [\gamma, \gamma]$$

である。 T の時刻(整数)の集合を I として, 第3図(b)は $(\sigma(I), \kappa^*)$ の区間グラフである。

$[\alpha, \alpha] \kappa^* [\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma] \kappa^* [\gamma, \gamma]$ は, それぞれ, 上向き, 右向きの1目盛の矢印で表示され, $[\alpha, \alpha]$ と $[\alpha, \beta]$ の間と, $[\beta, \gamma]$ と $[\gamma, \gamma]$ の間に化石タクサの欠落はない。 $[\alpha, \beta] \kappa^* [\beta, \gamma]$ は右上向きの矢印で表示され, $[\alpha, \beta]$ と $[\beta, \gamma]$ の間に化石タクサの組み合わせが欠落していることを表す。

$[\alpha, \beta]$ と $[\beta, \gamma]$ の間に $[\beta, \beta]$ という化石タクサの組み合わせが欠落している。第3図(c)は $(\sigma(T), \kappa^*)$ の区間グラフである。欠落する $[\beta, \beta]$ を Δ で表示して, 化石タクサの組み合わせの順序を表示した。欠落する化石タクサの組み合わせを加えると, すべての順序がこの順序は上向き, 右向きの1目盛の矢印で表示される。



第3図 化石タクサの組み合わせが欠落している例。

(a) Σ の生存期間 T と種 α, β, γ の生存期間。

(b) $(\sigma(I), \kappa^*)$ の区間グラフ。 (c) $(\sigma(T), \kappa^*)$ の区間グラフ。

4. おわりに

時刻を, 或る単位で計測して小数点以下を切り捨てた整数で表したとき, 化石のタクサの組み合わせの欠落が生じることがある。この発見に区間のグラフが役に立つ。

文 献

塩野清治・山口久美子(1996)全順序集合の区間とその前後関係のグラフ表示。GEOINFORUM—'96 講演予稿集。日本情報地質学会, pp.41-42。

塩野清治・山口久美子(1997)生層序学的方法を形式表現するための数学的基礎—古生物の生存期間と年代区分—。情報地質, vol.8, no.4, pp.227-237。

山口久美子・塩野清治(2013)全順序集合上の区間のグラフ表示を応用した生層序における化石のタクサの組み合わせの順序の表現。情報地質, vol.24, no.2, pp.086-087。