

化石タクサの組み合わせを推定するための 全順序集合上の区間のグラフ

山口 久美子*・塩野 清治**

Graph of Intervals on a Totally Ordered Set to Estimate Associations of Fossil Taxa

Kumiko YAMAGUCHI* and Kiyoji SHIONO**

* 5-3-5 Midorigaoka, Heguri Ikoma-gun Nara 636-0941, Japan. E-mail: qys05253@nifty.ne.jp
** 大阪市立大学名誉教授 Department of Geoscience, Graduate School of Science, Osaka City University,
3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka 558-8585, Japan.

キーワード：生層序学，化石タクサの順序，年代区分，区間，論理地質学

Key words：Biostratigraphy, Order of Fossil Taxa, Time Classification, Interval,
Geology-Oriented Logical System

1. はじめに

全順序集合上の区間のグラフは，生層序ユニット中の化石タクサの組み合わせの順序表現に有効である(山口・塩野，2013)。今回の発表では，時間軸上のタクソンの生存期間，および，層序断面からのサンプリングによる化石タクサの組み合わせの推定に全順序集合上の区間のグラフが有用であることを示す。

2. 時刻・期間について

2.1 時刻と期間

或る時刻を0として，時刻を100万年・年・月・日・時・分・秒など時間の単位で計測した数値とする。さらに，その数値を，小数点以下を切り捨てた整数であるとする。時刻 i, j に対して，

$$i < j \Leftrightarrow i \text{ は } j \text{ より過去である} \quad (1)$$

とする。 i から j までの実数の区間：

$$[i, j] = \{ t \mid i \leq t \leq j, t \text{ は実数} \} \quad (2)$$

を時刻 i から時刻 j までの時間，あるいは，期間とよぶことにする。なお，(1)の実数の大小についても(2)と同様とする。

2.2 タクソンの生存期間

タクソン(taxon)は生物の分類単位であり，その複数形がタクサ(taxa)である。

生物の個体はある時刻からある時刻までの時間に生存すると仮定する。タクソンの生存期間を，分類された個体の生存する時間の和集合であると定義する。生層序学の基礎である化石の連続性の前提として，タクソンの生存期間は，(2)のようなある時刻からある時刻までの期間であると仮定する。

2.3 上位のタクソンと下位のタクソン(種)

タクソンは階層的であり，上位から界，門，綱，目，科，属，種である。以下， Σ を上位のタクソンとし， Σ の種の集合を S_0 とする。化石タクサを幾つかの種とする。

Σ の生存期間を T ，種 α の生存期間を $\tau(\alpha)$ とする。 T も $\tau(\alpha)$

もある時刻からある時刻までの期間であるという仮定を満たす。タクソンの生存期間の定義より， S_0 のすべての種の生存期間の和集合が T となる。

$$T = \bigcup_{\alpha \in S_0} \tau(\alpha).$$

3. 種の組み合わせ

3.1 種の選択

$\tau(\alpha)=[i, j]$ のとき， $\tau(\alpha)$ の最小元 $\min \tau(\alpha)$ は i である。 $\tau(\alpha)$ の最大元 $\max \tau(\alpha)$ は j である。

種の生存期間の前後関係 $<^*$ を次のように定義する。

$$\tau(\alpha) <^* \tau(\beta) \Leftrightarrow \min \tau(\alpha) < \min \tau(\beta), \text{ かつ,} \\ \max \tau(\alpha) < \max \tau(\beta). \quad (3)$$

S_0 上の順序 κ を次のように定義する。

$$\alpha \kappa \beta \Leftrightarrow \tau(\alpha) <^* \tau(\beta), \text{ または, } \alpha = \beta. \quad (4)$$

S_0 から次の2つの仮定を満たす種の集合 S を選択して，塩野・山口(1997)と同様に， T をいくつかの年代に区分する。

仮定1 (S, κ)は有限な全順序集合である。

仮定2 $T = \bigcup_{\alpha \in S} \tau(\alpha)$ 。

3.2 種の組み合わせ

T^* ， $\tau^*(\alpha)$ を，それぞれ， T ， $\tau(\alpha)$ の始まりの時刻も終りの時刻も小数点以下を切り捨てる前の時刻で得られた生存時間とする。 $\tau(\alpha)=[i, j]$ のときは， $\tau^*(\alpha)=[i+\Delta_1, j+\Delta_2]$ ， $0 \leq \Delta_1 < 1$ ， $0 \leq \Delta_2 < 1$ であり， $\tau(\alpha) <^* \tau(\beta)$ のとき， $\tau^*(\alpha) <^* \tau^*(\beta)$ で生存期間の前後関係 $<^*$ はそのまま， $\tau^*(\alpha)$ について仮定1に相当する性質が成り立つ。仮定2に相当する性質 $T^* = \bigcup_{\alpha \in S} \tau^*(\alpha)$ は保証されないが，単純のため， $T^* = \bigcup_{\alpha \in S} \tau^*(\alpha)$ も満たすとす。

仮定1, 2を満たす S を選択したとき， T^* 内の t に生存する種の集合 $\sigma^*(t)$ ：

$$\sigma^*(t) = \{ \alpha \mid t \in \tau^*(\alpha), t \in T^*, \alpha \in S \} \quad (5)$$

の t の整数部分が i のとき， $\sigma(i) = \sigma^*(t)$ ：

$$\sigma(i) = \{ \alpha \mid t \in \tau^*(\alpha), t \in T^*, i = [t], \alpha \in S \} \quad (6)$$

とする。ここで， $i = [t]$ は，実数 t の整数部分が i であるこ

とである。

$$\sigma(i) \text{ が生存する年代 } \varepsilon(i) \text{ は}$$

$$\varepsilon^*(i) = \{t \mid \sigma^*(t) = \sigma(i), t \in T^*\} \quad (7)$$

の最小値と最大値の両方を、小数点以下を切り捨てて整数とした期間である。σ(i)は年代ε(i)の種の組み合わせとよぶことにする。

3.3 種の組み合わせの順序

Sが仮定1, 2を満たすとき, σ(i)は有限な全順序集合(S, κ)上の区間になる。ここで、有限な全順序集合(S, κ)上の区間[α, β]とは、ακβであるα, β∈Sに対して、

$$[\alpha, \beta] = \{\gamma \mid \alpha\kappa\gamma, \text{ かつ, } \gamma\kappa\beta, \gamma \in S\}$$

である。

(S, κ)上のすべての区間の集合S*上の順序κ*を

$$[\alpha, \beta] \kappa^* [\gamma, \delta] \Leftrightarrow \alpha\kappa\gamma, \text{ かつ, } \beta\kappa\delta$$

と定義する。時刻i, 時刻jに対して、

$$i \leq j \Rightarrow \sigma(i) \kappa^* \sigma(j)$$

という種の組み合わせの順序が成り立ち、種の組み合わせの集合(σ(T), κ*)が全順序集合になる。

4. 種の組み合わせのグラフ表示

(S, κ)上の区間[α, β]を, S×Sの座標図上の点(α, β)で表示し、この座標図を全順序集合(S, κ)上の区間のグラフとよぶ(塩野・山口, 1996)。[α, β]κ*[γ, δ]をグラフ上で、点(α, β)から(γ, δ)への矢印で表示する。

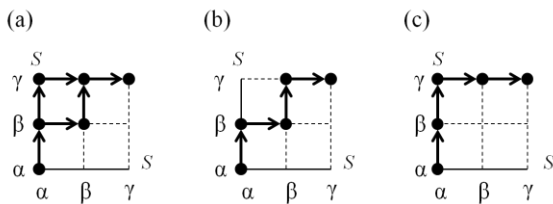
以下では、簡単に、S={α, β, γ}, ακβκγを例にして、種の組み合わせを考える。第1図(a)はこの(S*, κ*)のグラフである。推移的な関係・反射的な関係から得られる順序を表す矢印は省いている。山口・塩野(2013)によると、種の組み合わせの集合(σ(T), κ*)は、第1図(b), (c)のいずれかでグラフ表示されて、

$$[\alpha, \alpha] \kappa^* [\alpha, \beta] \kappa^* [\beta, \beta] \kappa^* [\beta, \gamma] \kappa^* [\gamma, \gamma], \quad (8)$$

あるいは、

$$[\alpha, \alpha] \kappa^* [\alpha, \beta] \kappa^* [\alpha, \gamma] \kappa^* [\beta, \gamma] \kappa^* [\gamma, \gamma] \quad (9)$$

である。



第1図 区間のグラフ。(a) (S*, κ*)。(b) (σ(T), κ*)。 [α, α]κ*[α, β]κ*[β, β]κ*[β, γ]κ*[γ, γ]。(c) (σ(T), κ*)。 [α, α]κ*[α, β]κ*[α, γ]κ*[β, γ]κ*[γ, γ]。

5. 生存期間による種の組み合わせの推定

5.1 例1

第2図(a)に示す例は、Σの生存期間Tは、T=[1, 9]であり、Σ種α, β, γの生存期間は、それぞれ、τ(α)=[1, 5], τ(β)=[3, 7], τ(γ)=[5, 9]である。

種の組み合わせは、(6)より、

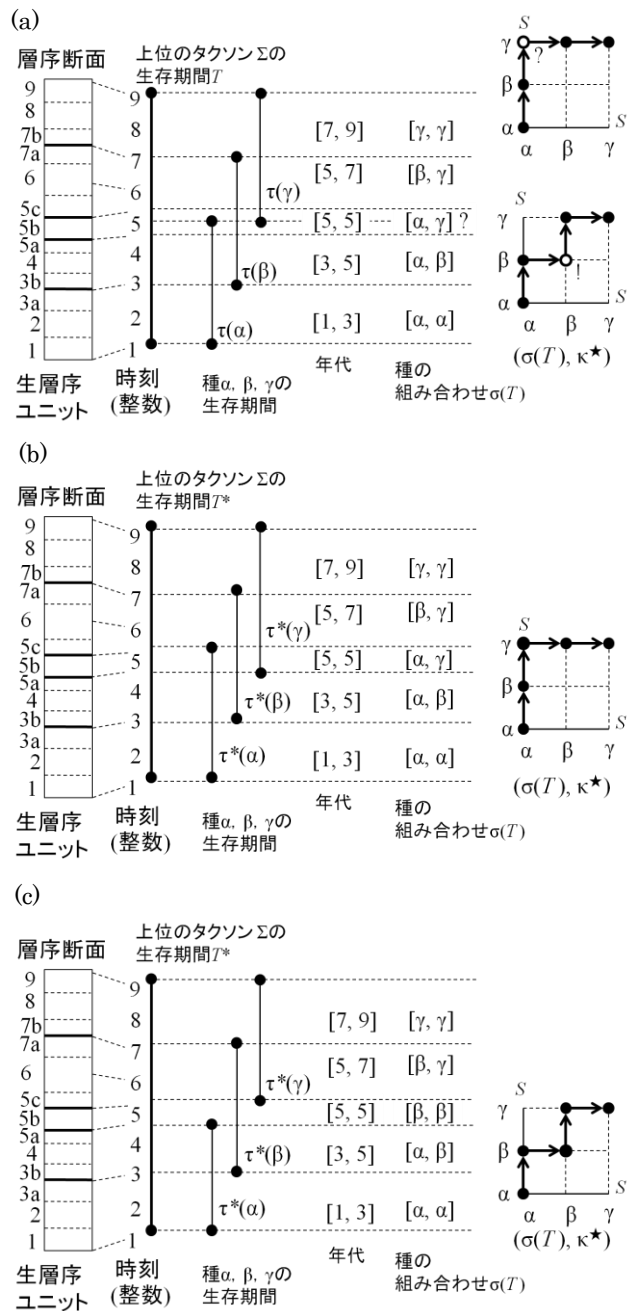
$$\begin{aligned} \sigma(1) &= \sigma(2) = \sigma(3) = \{\alpha\} = [\alpha, \alpha], \\ \sigma(3) &= \sigma(4) = \sigma(5) = \{\alpha, \beta\} = [\alpha, \beta], \\ \sigma(5) &= \{\alpha, \beta, \gamma\} = [\alpha, \gamma], \text{ あるいは, } \sigma(5) = \{\beta\} = [\beta, \beta] \\ \sigma(5) &= \sigma(6) = \sigma(7) = \{\beta, \gamma\} = [\beta, \gamma], \\ \sigma(7) &= \sigma(8) = \sigma(9) = \{\gamma\} = [\gamma, \gamma] \end{aligned}$$

である。tの整数部分がiのときσ(i)=σ*(t)であるから、σ(3)=[α, α], σ(3)=[α, β]など、種の組み合わせが2つある時刻がある。

σ(5)=[α, γ], あるいは、σ(5)=[β, β]について、模式図の見かけ上、σ(5)=[α, γ]であるが、σ(5)≠[α, γ]で、σ(5)=[β, β]かもしれない。第2図(a)では、[α, γ]?となっていて、その(σ(T), κ*)のグラフが図の右上にある。σ(5)=[β, β]かもしれないことを表すグラフは第2図(a)の右下にある。

max τ(α)=min τ(γ)=5 のとき、max τ*(α)=min τ*(γ)とは限らず、5 ≤ max τ*(α) < min τ*(γ) < 6 の場合と 5 ≤ min τ*(γ) ≤ max τ*(α) < 6 の場合がある。第2図(b)に示すように、5 ≤ max τ*(α) < min τ*(γ) < 6 の場合、σ(5)≠[α, γ]で、σ(5)=[β, β]となる。この場合、(σ(T), κ*)の順序は(8)であり、グラフは、第1図(b)と同じ第2図(b)の右にあるものである。

第2図(c)のように、5 ≤ min τ*(γ) ≤ max τ*(α) < 6 の場合、σ(5)≠[β, β]で、σ(5)=[α, γ]となる。(σ(T), κ*)の順序は(9)であり、グラフは、第1図(c)と同じ第2図(c)右になる。



第2図 (a) 例1の模式図と種の組み合わせのグラフ。(b) 5 ≤ max τ*(α) < min τ*(γ) < 6 の場合。(c) 5 ≤ min τ*(γ) ≤ max τ*(α) < 6 の場合。

グラフから $\max \tau^*(\alpha) < \min \tau^*(\gamma) < 6$ の場合も、 $5 \leq \min \tau^*(\gamma) \leq \max \tau^*(\alpha) < 6$ の場合も、種の組み合わせがすべて順番に得られたことがわかる。

年代は、[1, 3], [3, 5], [5, 5], [5, 7], [7, 9]であり、それぞれ、種の組み合わせ $[\alpha, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \gamma]$ あるいは $[\beta, \beta]$, $[\beta, \gamma]$, $[\gamma, \gamma]$ に1対1対応する。

第2図左は、 T に対応する層序断面の模式図である。時刻に対応する地層に、時刻と同じ数字をつけた。年代が区切られる時刻、例えば、3に対応する地層は、3aと3bに分かれている。5に対応する地層は、5a, 5b, 5cに分かれている。地層の集合で生層序ユニットを表すと、生層序ユニットは、{1, 2, 3a}, {3b, 4, 5a}, {5b}, {5c, 6, 7a}, {7b, 8, 9}であり、年代と同様、種の組み合わせと1対1に対応する。

5.2 例2

第3図に示す例は、 Σ の生存期間 T は、 $T=[1, 9]$ であり、 Σ 種 α, β, γ の生存期間は、それぞれ、 $\tau(\alpha)=[1, 5]$, $\tau(\beta)=[3, 7]$, $\tau(\gamma)=[6, 9]$ である。

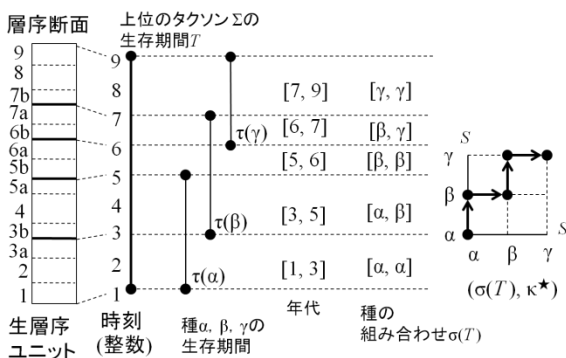
種の組み合わせは、(6)より、

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= \sigma(2) = \sigma(3) = \{\alpha\} = [\alpha, \alpha], \\ \sigma(3) &= \sigma(4) = \sigma(5) = \{\alpha, \beta\} = [\alpha, \beta], \\ \sigma(5) &= \sigma(6) = \{\beta\} = [\beta, \beta], \\ \sigma(6) &= \sigma(7) = \{\beta, \gamma\} = [\beta, \gamma], \\ \sigma(7) &= \sigma(8) = \sigma(9) = \{\gamma\} = [\gamma, \gamma] \end{aligned}$$

である。

Σ の生存期間 T は、種の組み合わせによって年代区分される。年代は[1, 3], [3, 5], [5, 6], [6, 7], [7, 9]であり、それぞれ、種の組み合わせ $[\alpha, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \beta]$, $[\beta, \gamma]$, $[\gamma, \gamma]$ に1対1対応する。 $(\sigma(T), \kappa^*)$ は、(8)の順序である。第1図(b)と第3図右が $(\sigma(T), \kappa^*)$ のグラフである。山口・塩野(2015)では、この例のように、 $\max \tau(\alpha) + 1 = \min \tau(\gamma)$ のとき、時刻 i における種の組み合わせ $\{\alpha \mid i \in \tau(\alpha), \alpha \in S\}$ に欠落があったが、(6)で種の組み合わせを表現したことで欠落は無くなったことがグラフから認められる。

第3図左は T に対応する層序断面の模式図である。生層序ユニットを地層の集合とすると、生層序ユニットは、{1, 2, 3a}, {3b, 4, 5a}, {5b, 6a}, {6b, 7a}, {7b, 8, 9}であり、年代と同様、種の組み合わせと1対1に対応する。



第3図 例2の模式図と種の組み合わせのグラフ。

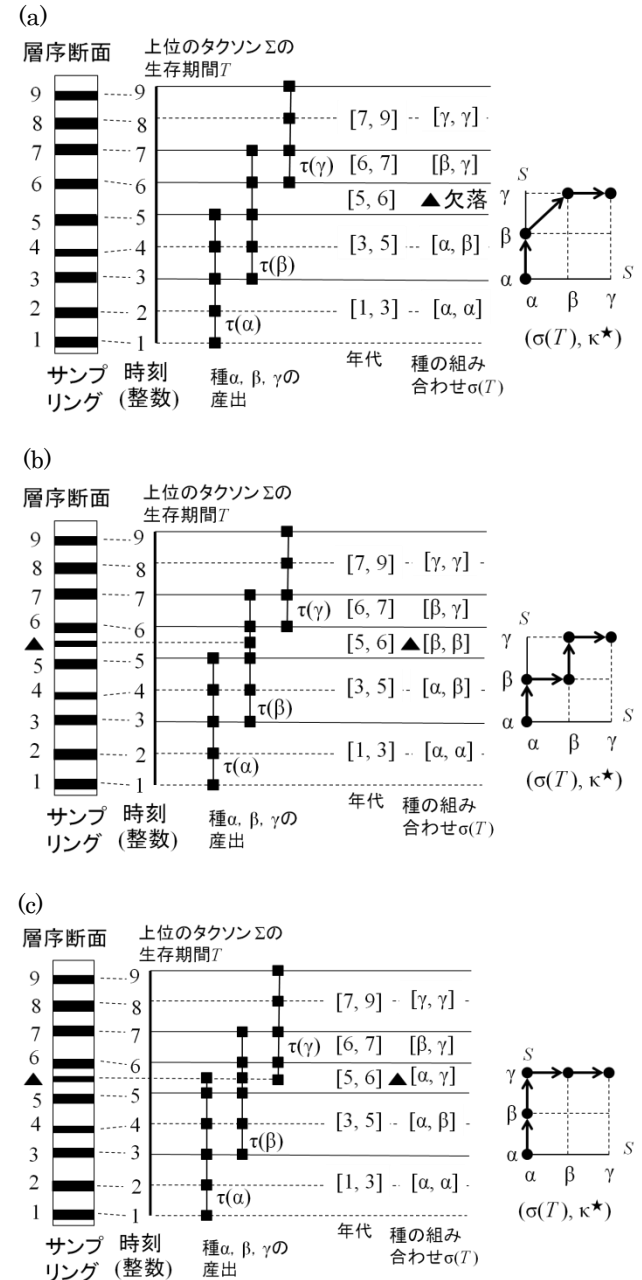
6. サンプリングによる種の組み合わせの推定

6.1 サンプリング

これまでと同様に、時刻は小数点以下を切り捨てた整数とする。第4図のように、層序断面から Σ の生存期間内の各時刻 i に相当するサンプル i を採ったとする。 $\sigma(i)$ を改めて、その時刻 i に生存する種の組み合わせ $\sigma(i)$ がサンプル i から産出されるとする。1つのサンプルをどのように分割

しても、産出される種の組み合わせは同じとする。

種 α の生存期間 $\tau(\alpha)$ を改めて、 $\{i \mid i \in \sigma(i), i \in T\}$ の最小値から最大値までの期間であると仮定する。 $\tau(\alpha)$ から得られる



第4図 (a) 例3の模式図と種の組み合わせのグラフ。
(b) サンプル5と6の間から β が産出された例。
(c) サンプル5と6の間から α, β, γ が産出された例。

$\tau^*(\alpha), \sigma^*(t), \varepsilon^*(t), \varepsilon(i)$ は、これまでと同様とする。

6.2 例3

第4図(a)のように、 $T=[1, 9]$ であり、サンプル1~9を採集した。サンプル1~9から産出された種の組み合わせは、

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= \sigma(2) = \{\alpha\}, \\ \sigma(3) &= \sigma(4) = \sigma(5) = \{\alpha, \beta\}, \\ \sigma(6) &= \sigma(7) = \{\beta, \gamma\}, \\ \sigma(8) &= \sigma(9) = \{\gamma\} \end{aligned}$$

である。

種 α, β, γ の生存期間は第3図の例と同じで、 $\tau(\alpha)=[1, 5]$, $\tau(\beta)=[3, 7]$, $\tau(\gamma)=[6, 9]$ となる。 $S=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ は仮定1, 2を満たす

す。(5)の $\sigma^*(t)$ を考慮すれば、第2図と同様に、年代は[1, 3], [3, 5], [5, 6], [6, 7], [7, 9]である。サンプル中の種の組み合わせは $[\alpha, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$, $[\gamma, \gamma]$ となり、それぞれ、年代[1, 3], [3, 5], [6, 7], [7, 9]に1対1対応する。年代[5, 6]の種の組み合わせをサンプルから産出していない。

$(\sigma(T), \kappa^*)$ の順序は、 $[\alpha, \alpha] \kappa^*[\alpha, \beta] \kappa^*[\beta, \gamma] \kappa^*[\gamma, \gamma]$ であり、そのグラフを第4図(a)右に示した。グラフで $[\alpha, \beta] \kappa^*[\beta, \gamma]$ が右上向きの矢印で示される。これは、 $[\alpha, \beta]$ と $[\beta, \gamma]$ の間に種の組み合わせがあることを表す。年代[5, 6]の種の組み合わせが $[\alpha, \beta]$ と $[\beta, \gamma]$ の間にあると推定される。

第4図(a)のように、第3図の例と同様、種 α, β, γ の生存期間から年代[5, 6]の種の組み合わせは $\{\beta\}$ 、すなわち、 $[\beta, \beta]$ であると予想される。第1図(b), (c)の $(\sigma(T), \kappa^*)$ の区間のグラフからは、 $[\alpha, \beta]$ の次は $[\beta, \beta]$ 、または、 $[\alpha, \gamma]$ であるので、 $[\alpha, \gamma]$ 、すなわち、 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ も予想される。これらの予想を検証するために、第4図(b), (c)のように、サンプル5と6の間をサンプリングする。

第4図(b)は、サンプル5と6の間をサンプリングして、サンプルから、予想通り、 β が産出された例である。種の組み合わせは $\{\beta\} = [\beta, \beta]$ であり、 $(\sigma(T), \kappa^*)$ の順序は(8)である。 $(\sigma(T), \kappa^*)$ のグラフを第4図(b)右に示した。

第4図(c)のように、サンプル5と6の間をサンプリングして、サンプルから3つの種 α, β, γ が産出されることもある。これも予想通りである。この予想は $(\sigma(T), \kappa^*)$ のグラフによる。この場合、種の組み合わせは $\{\alpha, \beta, \gamma\} = [\alpha, \gamma]$ であり、 $(\sigma(T), \kappa^*)$ の順序は(9)である。 $(\sigma(T), \kappa^*)$ のグラフを第4図(c)右に示した。

サンプル5と6の間から $[\alpha, \gamma]$ を産出した場合、 $\tau(\alpha)$ と $\tau(\gamma)$ の少なくとも1つが改められる。 $\tau(\alpha)$ と $\tau(\gamma)$ の両方が改められ、 $\tau(\alpha)=[1, 6]$, $\tau(\beta)=[3, 7]$, $\tau(\gamma)=[5, 9]$ となったとき、 $[\alpha, \gamma]$ が年代[5, 6]の種の組み合わせとなる。

6.3 例4

第5図も、 $T=[1, 9]$ で、サンプル1~9を採集した。サンプル1~9から産出された種の組み合わせは、

- $\sigma(1)=\sigma(2)=\{\alpha\}$,
- $\sigma(3)=\sigma(4)=\sigma(5)=\{\alpha, \beta\}$,
- $\sigma(6)=\{\alpha, \beta, \gamma\}$,
- $\sigma(7)=\sigma(8)=\{\beta, \gamma\}$,
- $\sigma(9)=\{\gamma\}$

である。

この産出から得られる種 α, β, γ の生存期間は第2図の例と同じで、 $\tau(\alpha)=[1, 5]$, $\tau(\beta)=[3, 7]$, $\tau(\gamma)=[5, 9]$ である。 $S=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ は仮定1, 2を満たす。サンプル中の種の組み合わせは $[\alpha, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \gamma]$, $[\beta, \gamma]$, $[\gamma, \gamma]$ である。第2図の例では、種の組み合わせ $[\alpha, \gamma]$ は、実は $[\beta, \beta]$ かもしれなかったが、サンプル

から産出された $[\alpha, \gamma]$ は $[\beta, \beta]$ でなく、 $[\alpha, \gamma]$ そのままである。

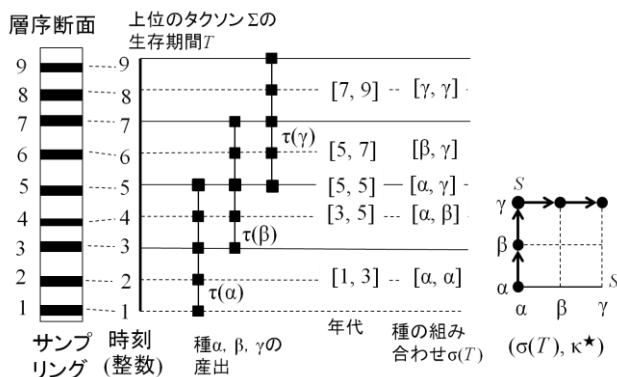
種の組み合わせの順序は(9)であり、 $(\sigma(T), \kappa^*)$ のグラフは第5図右のようになり、第1図(c)と同じである。グラフから、すべての種の組み合わせが得られたことがわかる。

7. おわりに

幾つかの種を化石タクサとして、区間のグラフを用いて、年代に対応する種の組み合わせをすべて、順番通りに得たことを確認した。また、区間のグラフから、サンプリングによる種の組み合わせの欠落も見つけて、欠落した種の組み合わせを推定した。

文 献

塩野清治・山口久美子(1996)全順序集合の区間とその前後関係のグラフ表示. GEOINFORUM-'96 講演予稿集. 日本情報地質学会, pp.41-42.
 塩野清治・山口久美子(1997)生層序学的方法を形式表現するための数学的基礎—古生物の生存期間と年代区分—. 情報地質, vol.8, no.4, pp.227-237.
 山口久美子・塩野清治(2013)全順序集合上の区間のグラフ表示を応用した生層序における化石のタクサの組み合わせの順序の表現. 情報地質, vol.24, no.2, pp.086-087.
 山口久美子・塩野清治(2015)生層序ユニット中の化石タクサの組み合わせの欠落を推定するための全順序集合上の区間のグラフ. 情報地質, vol.26, no.2, pp.054-055.



第5図 例4の模式図と種の組み合わせのグラフ。